Chapitre 1

Nombres entiers et nombres réels

1.1 Nombres entiers

1.1.1 Nombres entiers naturels et nombres entiers relatifs

Définition 1

On appelle **nombre entier naturel** un nombre entier qui est positif.
L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Exemple

3 est un nombre entier naturel
$15 \in \mathbb{N}$
$-2 \notin \mathbb{N}$

Définition 2

On appelle **nombre entier relatif** un nombre entier qui est positif ou négatif.
L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Exemple

-5 est un nombre entier relatif
$9 \in \mathbb{Z}$
$-2 \in \mathbb{Z}$
$-0,5 \notin \mathbb{Z}$

1.1.2 Multiples et diviseurs

Définition 3

Soit a et b deux entiers relatifs.
On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier k tel que $a = kb$.
On dit alors que b est un diviseur de a.

Exemple

21 est un multiple de 3 car $21 = k \times 3$ avec $k = 7$.
10 est un diviseur de 40 car $40 = k \times 10$ avec $k = 4$.
11 n'est pas un multiple de 5 car il n'existe pas d'entier k tel que $11 = k \times 5$

Théorème 1

La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a.

Démonstration

Soit b et c deux multiples de a.

Comme b est un multiple de a, il existe un entier k_1 tel que $b = k_1 a$.
Comme c est un multiple de a, il existe un entier k_2 tel que $c = k_2 a$.

On obtient :

$b + c = k_1 a + k_2 a = a(k_1 + k_2) = ka$, où $k = (k_1 + k_2)$.

k est un nombre entier car somme de deux entiers, donc $b + c = ka$ avec k entier.

$b + c$ est donc un multiple de a.

Théorème 2

Critères de divisibilité

Un nombre est divisible par ...

... **2** s'il se **termine** par 0, 2, 4, 6 ou 8.
... **5** s'il se **termine** par 0 ou 5.

... **3** si la **somme de ses chiffres** est un mutiple de 3.
... **9** si la **somme de ses chiffres** est un multiple de 9.

... **4** si ses **deux derniers chiffres** forment un multiple de 4.

1.1.3 Nombres pairs et impairs

Définition 4

Un nombre **pair** est un multiple de 2 et un nombre **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

Autrement dit :

Un nombre a est pair s'il existe un entier k tel que $a = 2k$.

Un nombre a est impair s'il existe un entier k tel que $a = 2k + 1$.

Exemple

$34 = 2 \times 17$
$876 = 2 \times 438$
et $0 = 2 \times 0$
sont des nombres pairs.

$35 = 2 \times 17 + 1$
$877 = 2 \times 438 + 1$
et $1 = 2 \times 0 + 1$
sont des nombres impairs.

Théorème 3

Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration

Soit a un nombre impair. Alors il existe un entier k te que $a = 2k + 1$.
On a,

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2\boldsymbol{k'} + 1 \ ,$$

$$\text{avec } \boldsymbol{k'} = 2k^2 + 2k \text{ entier car somme de deux entiers.}$$

Donc a^2 est impair car il s'écrit sous la forme $a^2 = 2\boldsymbol{k'} + 1$.

1.1.4 Nombres premiers

Définition 5

Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs distincts, 1 et lui-même.

Exemple

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... la liste est infinie.

1 n'est pas un nombre premier car il admet un seul diviseur.

Théorème 4

Tout nombre non premier peut se décomposer en produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Exemple

$600 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 2^3 \times 3 \times 5^2$

Définition 6

Deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur commun est 1.

Exemple

$15 = 3 \times 5$ et $14 = 2 \times 7$ sont premiers entre eux, leur seul diviseur commum est 1.

$15 = 3 \times 5$ et $21 = 3 \times 7$ ne sont pas premiers entre eux, 3 est un diviseur commum.

1.2 Nombres réels

1.2.1 Nombres décimaux

Définition 7

Un nombre **décimal** est un nombre qui s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^p}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$.

Son éciture décimale contient alors un nombre fini de chiffres.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemple

$0,65 \in \mathbb{D}$ $\quad$ $728 \in \mathbb{D}$ $\quad$ $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ mais $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$

Démonstration

Démontrons que le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

On va effectuer une démonstration par l'absurde supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Si la démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal, c'est à dire que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$ avec a entier et p entier naturel.
On obtient,

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p} \iff 10^p = 3a$$

Cela veut dire que 10^p est un multiple de 3.
Or, ceci est impossible car quand un nombre est multiple de 3 la somme de ses chiffres est un multiple de 3 et la somme des chiffres de 10^p est 1.

L'hypothèse de départ est donc fausse, $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

1.2.2 Nombres rationnels

Définition 8

Un nombre **rationnel** est un nombre qui s'écrit sous la forme d'un quotient $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemple

$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ $4 \in \mathbb{Q}$ $-4.8 \in \mathbb{Q}$ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Définition 9

Une fraction est **irréductible** lorsque son numératur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Théorème 5

Tout nombre rationnel r admet une **forme irréductible unique**.

C'est-à-dire qu'il existe un unique $a \in \mathbb{Z}$ et un unique $b \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$r = \frac{a}{b} \quad \text{avec} \quad a \text{ et } b \text{ premiers entre eux.}$$

Exemple

$$\frac{60}{126} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

$\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$.

1.2.3 Nombres irrationnels

Définition 10

Un nombre qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**.

Exemple

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et π sont irrationnels.
Ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'un quotient de relatifs.

Démonstration

Irrationnalité de $\sqrt{2}$.

On va effectuer une démonstration par l'absurde supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel.
Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels, premiers entre eux, q non nul.
On obtient,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \iff 2 = \frac{p^2}{q^2} \iff p^2 = 2q^2$$

On en déduit que p^2 est pair, ce qui entraîne p pair.
En effet, si p était impair on aurait p^2 impair car le carré d'un nombre impair est impair.

Puisque p est pair, il existe un entier n tel que $p = 2n$.
On obtient,

$$p^2 = 2q^2 \iff (2n)^2 = 2q^2 \iff 4n^2 = 2q^2 \iff 2n^2 = q^2$$

On en déduit que q^2 est pair, ce qui entraîne q pair.

Or, p et q sont premiers entre eux, ils ne peuvent pas être pairs simultanément.
On aboutit à une absurdité.
Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Et donc, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.2.4 Nombres réels et classification

Définition 11

Un nombre est **réel** s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée appelée droite numérique.

À chaque point de la droite correspond un nombre unique (son abscisse) et à chaque nombre nombre réel correspond un point unique de la droite.

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.
C'est l'ensemble de tous les nombres utilisés en classe de seconde.

Exemple

$0.65 \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $\quad \pi \in \mathbb{R}$

Théorème 6

Classification des nombres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
" $\subset$ " se lit "*est inclus dans*".

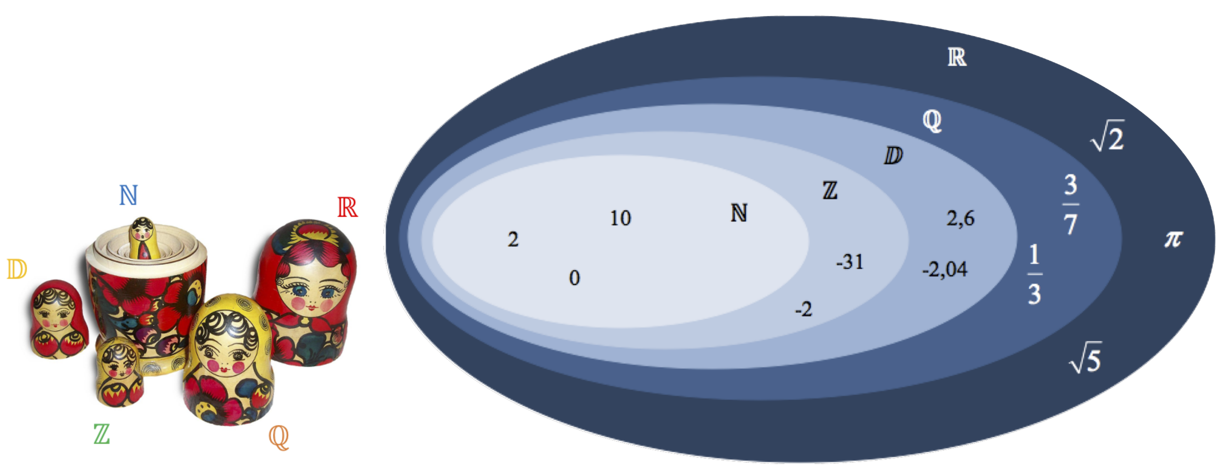

FIGURE 1.1 – Classification des Nombres