Démonstration de $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Idée

si $\sqrt{2}$ est une fraction

alors elle admet une forme irréductible $\frac{p}{q}$

mais si c'est le cas, p et q sont des nombres pairs

ils ne peuvent pas être pairs car la fraction est irréductible

donc $\sqrt{2}$ n'est pas une fraction

Démonstration de $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Il existe p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ fraction irréductible.

On obtient,

$\Leftrightarrow p^2 = 2q^2$

Ce qui prouve que p^2 est pair et donc que p est pair.

On peut écrire $p = 2n$ et on obtient ,

$\Leftrightarrow q^2 = 2n^2$

Ce qui prouve que q^2 est pair et donc que q est pair.

Mais p et q ne peuvent pas être tous les deux pairs car la fraction est irréductible.

Donc l'hypothèse de départ est fausse et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration de $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Il existe p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ fraction irréductible.

On obtient, veut dire «est équivalent à»

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Leftrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

Ce qui prouve que p^2 est pair et donc que p est pair.

On peut écrire $p = 2n$ et on obtient ,

$$2q^2 = p^2 \Leftrightarrow 2q^2 = (2n)^2 \Leftrightarrow 2q^2 = 4n^2 \Leftrightarrow q^2 = 2n^2$$

Ce qui prouve que q^2 est pair et donc que q est pair.

Mais p et q ne peuvent pas être tous les deux pairs car la fraction est irréductible.

Donc l'hypothèse de départ est fausse et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration de $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Il existe p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ fraction irréductible.

On obtient,

veut dire «est équivalent à»

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \iff \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \iff 2 = \frac{p^2}{q^2} \iff p^2 = 2q^2$$

Ce qui prouve que p^2 est pair et donc que p est pair.

On peut écrire $p = 2n$ et on obtient ,

$$2q^2 = p^2 \iff 2q^2 = (2n)^2 \iff 2q^2 = 4n^2 \iff q^2 = 2n^2$$

Ce qui prouve que q^2 est pair et donc que q est pair.

Mais p et q ne peuvent pas être tous les deux pairs car la fraction est irréductible.

Donc l'hypothèse de départ est fausse et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

0 On va prouver que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme une fraction

1 On suppose le contraire, pour montrer que c'est un absurde.

Toute fraction admet une forme irréductible $\frac{p}{q}$.

2 On manipule l'expression pour montrer que p est pair

3 On utilise le fait que p soit pair et manipule l'expression pour montrer que q est pair

4 Contradiction : p et q ne peuvent pas être pairs

On conclut : $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme une fraction